2.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ
ω με $0^o \le \omega \le 180^o$

ΘΕΩΡΙΑ

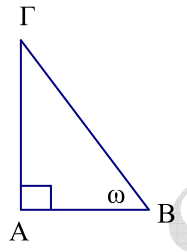
1.
Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο θυμίζουμε ότι

$$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$



2.
Τρ/κοί αριθμοί γωνίας ω με $0^o < \omega < 180^o$ στο σύστημα αξόνων

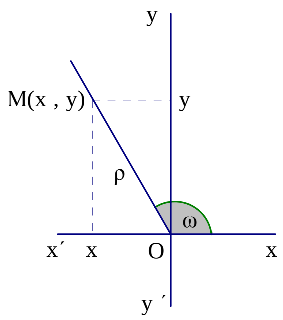
Στο διπλανό σχήμα είναι $x\hat{O}M = \omega$, όπου

$M\,(x\,,\,y)$ και $OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Τότε $$ημω = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{y}{\rho}$$

$$συνω = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{x}{\rho}$$

$$εφω = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετημένη του Μ}} = \frac{y}{x}$$



3.
Πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών

- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί
- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι θετικό το ημίτονο και αρνητικοί οι άλλοι

4.
Ειδικές γωνίες :

- $\omega = 0^o$ τότε $ημ0^o = 0$, $συν0^o = 1$, $εφ0^o = 0$
- $\omega = 90^o$ τότε $ημ90^o = 1$, $συν90^o = 0$, $εφ90^o$ δεν ορίζεται
- $\omega = 180^o$ τότε $ημ180^o = 0$, $συν180^o = -1$, $εφ180^o = 0$

5.

Υπενθύμιση:

ω	30^o	45^o	60^o
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Μέθοδος :

Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω, τοποθετούμε τη γωνία σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy έτσι ώστε η κορυφή της να είναι στο O και μία πλευρά της να είναι η ημιευθεία Ox.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες $(x\ ,\ y)$ τυχαίου σημείου Μ της άλλης πλευράς και με τον τύπο $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ την απόσταση του Μ από το Ο.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους τύπους του (2) της θεωρίας .

2.

Πρόταση : Αν $0^o \le \omega \le 180^o$ τότε $0 \le ημω \le 1$
και $-1 \le συνω \le 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Αν $0^o < ω < 180^o$ τότε $εφω > 0$ Λ

β) Υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε $συνω = κ^2 + \frac{3}{2}$, όπου κ πραγματικός αριθμός Λ

γ) $συν\,105^o - συν\,37^o < 0$ Σ

δ) $ημ\,47^o + ημ\,132^o > 0$ Σ

ε) $εφ135^o\, εφ25^o < 0$ Σ

στ) Αν $ημω > 0$ τότε η ω είναι οξεία Λ

Προτεινόμενη λύση

α)
Αν $90^o < ω < 180^o$ τότε $εφω < 0$ άρα η πρόταση είναι λάθος

β)

Για κάθε πραγματικό αριθμό κ είναι $κ^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} > 1$ δηλαδή $συνω > 1$

Άρα η πρόταση είναι λάθος

γ)
$συν\,105^o < 0$ και $-συν\,37^o < 0$ άρα $συν\,105^o - συν\,37^o < 0$
Οπότε η πρόταση είναι σωστή

δ)
$ημ47^o > 0$ και $ημ132^o > 0$ άρα $ημ\,47^o + ημ\,132^o > 0$
Οπότε η πρόταση είναι σωστή

ε)
$εφ135^o < 0$ και $εφ25^o > 0$ άρα $εφ135^o\, εφ25^o < 0$
Οπότε η πρόταση είναι σωστή

στ)
Και αμβλεία να είναι η γωνία πάλι $ημω > 0$. Άρα η πρόταση είναι λάθος

2.

Σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της 1ης γραμμής αντιστοιχίστε το ίσον του της 2ης γραμμής .

1.ημ0°	2.ημ90°	3.ημ180°	4.συν0°	5.συν90°	6.συν180°	7.εφ0	8.εφ180
α. 1			β. 0			γ. – 1	

Θεωρία 4

Απάντηση

$ημ0 = 0$ άρα $1 \to β$, $ημ90^o = 1$ άρα $2 \to α$, $ημ180^o = 0$ άρα $3 \to β$
$συν0^o = 1$ άρα $4 \to α$, $συν90^o = 0$ άρα $5 \to β$, $συν180^o = -1$ άρα $6 \to γ$
$εφ0^o = 0$ άρα $7 \to β$, $εφ180^o = 0$ άρα $8 \to β$

3.

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή των παραστάσεων

Α = 4ημω + 3   Β = 2 – 3συνω , όπου $0^o \le ω \le 180^o$

Σχόλιο 2

Προτεινόμενη λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $0^o \le ω \le 180^o$ τότε

$$0 \le ημω \le 1$$
$$0 \le 4ημω \le 4$$
$$3 \le 4\,ημω + 3 \le 3 + 4$$
$$3 \le Α \le 7$$

Άρα Amin = 3 και Amax = 7

Ομοίως $0^o \le ω \le 180^o$ τότε

$$-1 \le συνω \le 1$$
$$3 \ge -3συνω \ge -3$$
$$3 + 2 \ge 2 - 3συνω \ge -3 + 2$$
$$5 \ge Β \ge -1$$

Οπότε Bmin = –1 και Bmax = 5

4.

Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^o$), αν

$ημΒ = \frac{3}{5}$ και ΑΓ = 6

Θεωρία 1

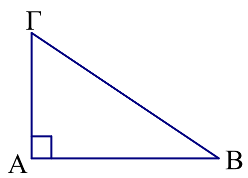
Προτεινόμενη λύση

$ημΒ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ άρα $\frac{3}{5} = \frac{6}{ΒΓ}$ οπότε ΒΓ = 10

Πυθαγόρειο θεώρημα : $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2 =$

$= 100 - 36 = 64$ άρα

$ΑΒ = \sqrt{64} = 8$



5.

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x\hat{O}M$, όπου Ο η αρχή ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και

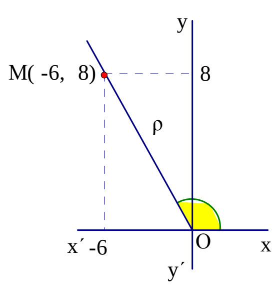
α) Μ(– 6 , 8)   **β)** Μ(12 , 5)   **γ)** Μ(7, 0)

Θεωρία 2

Προτεινόμενη λύση

α)

$$ρ = OM = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} =$$
$$= \sqrt{100} = 10$$



Άρα $ημ\, x\hat{O}M = \frac{y}{ρ} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$συν\, x\hat{O}M = \frac{x}{ρ} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

$εφx\hat{O}M = \frac{y}{x} = -\frac{8}{6} = -\frac{3}{5} = -\frac{4}{3}$

β)

Ομοίως ρ = 13 , $ημ\, x\hat{O}M = \frac{5}{13}$, $συν\, x\hat{O}M = \frac{12}{13}$, $εφx\hat{O}M = \frac{5}{12}$

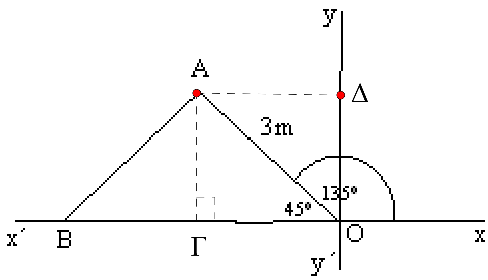
γ) $\rho = 7,\quad \eta\mu\, x\hat{O}M = \frac{0}{7} = 0,\quad \sigma\upsilon\nu\, x\hat{O}M = \frac{7}{7} = 1,\quad \varepsilon\varphi x\hat{O}M = \frac{0}{7} = 0$

6.

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές με ΟΑ = 3.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς τη γωνίας των 135^o



Προτεινόμενη λύση

α)

$$\eta\mu 45^o = \frac{A\Gamma}{AO} \quad \text{άρα} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{3} \quad \text{οπότε} \quad A\Gamma = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως η τεταγμένη του Α είναι $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές , αφού έχει οξεία γωνία 45^o.

Άρα $O\Gamma = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ οπότε η τετμημένη του Α είναι $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Είναι λοιπόν $A\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

β)

$$\eta\mu 135^o = \frac{y}{\rho} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 135^o = \frac{x}{\rho} = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi 135^o = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -1$$

7.

α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της ευθείας με εξίσωση $2x + 3y = 6$

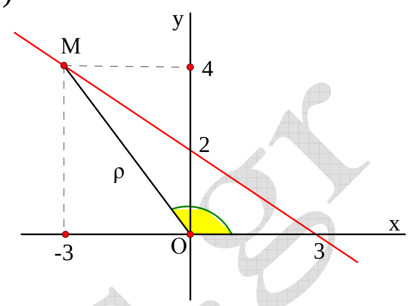
β) Να προσδιορίσετε σημείο Μ της ευθείας με τεταγμένη 4.

γ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x\hat{O}M$

Προτεινόμενη λύση

α)

Βρίσκουμε δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η γραφική παράσταση
για $x = 0$ έχουμε $y = 2$ ένα σημείο είναι το $(0 , 2)$ και
για $y = 0$ έχουμε $x = 3$ ένα άλλο σημείο είναι το $(3, 0)$
η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα και
είναι η κόκκινη ευθεία



β)

Αν $y = 4$ τότε $2x + 12 = 6$ άρα $x = -3$
οπότε $M(-3 , 4)$

γ)

$$\rho = OM = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

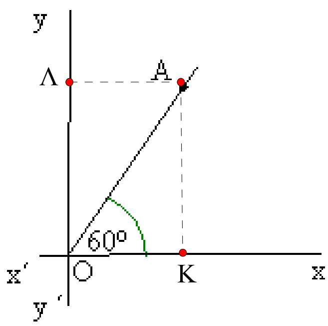
$$ημ\, x\hat{O}M = \frac{y}{\rho} = \frac{4}{5}$$

$$συν\, x\hat{O}M = \frac{x}{\rho} = -\frac{3}{5}$$

$$εφ x\hat{O}M = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

8 .

Στο διπλανό σχήμα, στο σημείο Α είναι ένας άνθρωπος που απέχει από την αρχή Ο απόσταση ΟΑ = 5 m. Να βρείτε τις συντεταγμένες της θέσης Α του ανθρώπου.



Προτεινόμενη λύση

$$ημ60^o = \frac{AK}{OA} \quad οπότε \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{5} \quad άρα \quad AK = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Επομένως η τεταγμένη του Α είναι $y = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$συν60^o = \frac{OK}{OA} \quad οπότε \quad \frac{1}{2} = \frac{OK}{5} \quad άρα \quad OK = \frac{5}{2}$$

Οπότε η τετμημένη x του Α είναι $x = \frac{5}{2}$

Άρα $A\left(\frac{5}{2} , \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

9.

Αν $M(\alpha, 4)$ και $OM = 5$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $x\hat{O}M$.

Προτεινόμενη λύση

$OM = \sqrt{\alpha^2 + 4^2}$ άρα $5 = \sqrt{\alpha^2 + 4^2}$

$\alpha^2 + 16 = 25$

$\alpha^2 = 9$ οπότε $\alpha = 3$ ή $\alpha = -3$

Όταν $\alpha = 3$ τότε $M(3, 4)$ και $ημ\, x\hat{O}M = \frac{4}{5}$, $συν x\hat{O}M = \frac{3}{5}$, $εφ\, x\hat{O}M = \frac{4}{3}$

Όταν $\alpha = -3$ τότε $M(-3, 4)$ και $ημ\, x\hat{O}M = \frac{4}{5}$, $συν x\hat{O}M = -\frac{3}{5}$, $εφ\, x\hat{O}M = -\frac{4}{3}$

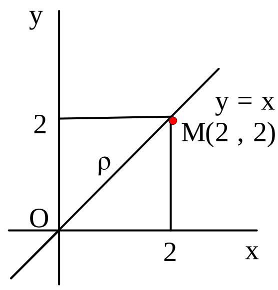
10.

i) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = x$ και να βρείτε την τεταγμένη ενός σημείου της M του οποίου η τετμημένη είναι 2 .

ii) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\omega} = x\hat{O}M$.

iii) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$

Προτεινόμενη λύση



i)

Η γραφική παράσταση της ευθείας $y = x$ φαίνεται στο σχήμα.

Για $x = 0$ είναι $y = x = 0$

Για $x = 2$ είναι $y = x = 2$ άρα $M(2, 2)$

ii)

$\rho = OM = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$ημ\, x\hat{O}M = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$συν x\hat{O}M = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $εφ\, x\hat{O}M = 1$

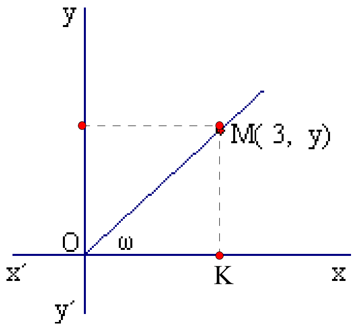
iii)

Επειδή $0 < x\hat{O}M < 90^o$ και $ημ\, x\hat{O}M = \frac{\sqrt{2}}{2}$, είναι $x\hat{O}M = 45^o$

11.

Στο διπλανό σχήμα είναι συνω $= \frac{3}{4}$

α) Να υπολογίσετε την τεταγμένη του Μ
β) Να βρείτε το ημω και την εφω



Προτεινόμενη λύση
α)

συνω $= \frac{x}{OM}$ άρα $\frac{3}{4} = \frac{3}{OM}$ άρα ΟΜ = 4

Πυθαγόρειο στο ΟΜΚ : $MK^2 = OM^2 - OK^2 =$
$= 16 - 9 = 7$

άρα $MK = \sqrt{7}$

Επομένως η τεταγμένη y του Μ είναι $y = \sqrt{7}$

β)

ημω $= \frac{y}{OM} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ και εφω $= \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{7}}{3}$